FUNDAMENTE ALE LOGICII ŞI MATEMATICII

Cătălina Daniela Răducu

INTRODUCERE. RĂDĂCINI FILOSOFICE RELEVANTE

Matematica şi logica, cele mai vechi dintre ştiinţe, creaţii ale gândirii elene, s-au dezvoltat timp de aproape două milenii în chip independent, chiar dacă matematica a constituit un subiect de particular interes pentru filosofi, oferind logicienilor mostre de inferenţe riguroase şi modelul unei ştiinţe demonstrative. „Vine însă, în orice domeniu, momentul în care trebuie să se acţioneze rigorile intransigenţei”[i]. Citatul din Russell este relavant pentru a caracteriza scena gândirii ştiinţifice de la sfârşitul secolului al-XIX-lea şi începutul secolului al-XX-lea, în care se pun pentru prima dată în matematică problemele generale despre continuul matematic şi numerele infinite. Va fi matematicianul german Georg Cantor cel care, dezvoltând teoria mulţimilor, va oferi gânditorilor contemporani lui o veritabilă provocare. Apariţia paradoxurilor în cadrul acestei teorii, şi, mai general, în cadrul matematicii, ştiinţă considerată a fi, până în acel moment paradigmatică prin rigoarea sa, a suscitat un efort apreciabil din partea filosofilor vremii. Aceste eforturi marchează începutul unei noi ere pentru matematică: aceea a cercetării fundamentelor ei: „Când se constată că o clădire, altfel bună, nu are o temelie destul de solidă nu înseamnă că ea trebuie abandonată. Există mijloace de a-i întări temelia”, remarcă ilustrul matematician A. Hollinger.[ii] Noua eră va fi pentru matematică una în care se va reevalua raportul ei cu logica: aceasta din urmă va oferi mijloacele pentru reevaluarea fundamentelor matematicii.

Intenţia acestei lucrări este de a discuta cum anume s-a transpus în fapt acest remarcabil efort de fundamentare a matematicilor prin contribuțiile celor trei mari curente: logicismul, formalismul, intuiționismul.

Vorbind despre fundamentele matematicii, discursul trebuie să ne poarte, în primul rând, asupra caracterului acestei științe şi al enunțurilor cu care aceasta operează. Două nume sonore trebuie invocate aici; este vorba despre Leibniz şi Kant.

Autor al unui fascinant sistem metafizic de o deosebită profunzime, apreciat într-o măsură extrem de mare de Russell, Leibniz a fost şi un matematician şi un logician de geniu. Poziția radicală leibiziană, în logică, aceea că predicatul este „conținut în subiect" este întărită de celebra sa doctrină metafizică conform căreia lumea constă în substanțe-subiect autoconsistente (sau monade) ce nu interacționează.

Acceptând forma logică subiect-predicat (în sensul de predicatul este o proprietate a subiectului) a tuturor propozițiilor, nu numai că anticipează logicismul, dar aduce logica şi matematica, discipline până la el separate, împreună, printr-o dublă inovație: pe de o parte, prin teza sa filosofică despre „verités de raison" şi „verités de fait", ce arată caracterul mutual exclusiv al acestora, iar pe de altă parte, introduce ideea metodologică de a utiliza calculul mecanic în ajutorul raționamentului deductiv, nu doar în cadrul disciplinelor relaționate în mod tradițional cu matematica, dar de asemenea şi dincolo de acestea, introducând, în mod particular, calculul în logică.

Referitor la distincția dintre adevăruri de rațiune şi adevăruri de fapt, dublată desigur de distincția dintre propoziții necesare şi propoziții contingente, Leibniz atribuie propozițiile necesare matematicii pure, iar cele contingente matematicii aplicate. Propozițiile matematicii sunt asemeni propozițiilor logicii, în sensul că nu sunt adevărate deoarece se referă la entități sau obiecte eterne, sau la obiecte ideale ce ar rezulta prin abstractizare. Ele sunt adevărate prin faptul că negarea lor ar fi logic imposibilă. Ceea ce este important de subliniat, pentru a continua expunerea noastră, este că, pe lângă faptul că aduce matematica şi logica împreună, visând la un simbolism ce ne-ar face capabili să lucrăm cu deducții foarte complicate, (ideal pe care Russell şi Whitehead l-au avut, mai apoi) Leibniz divide toate propozițiile în două clase ce exclud reciproc, propoziții analitice şi propoziții factuale, considerând propozițiile matematicii a fi analitice: „Referitor la propozițiile analitice, Leibniz susține că toate propozițiile logicii, aritmeticii şi geometriei sunt de acest fel.”[iii]

Va fi Kant al doilea nume pe care trebuie să-l menționăm în deschiderea acestei discuții, în măsura în care aceste îşi va concepe filosofia matematicii ca o reacție la cea a lui Leibniz, dar şi în măsura în care va influența în mod deosebit curentele formalist şi intuiționist, în filosofia matematicii a secolului al-XX-lea. El va introduce, pe lângă propozițiile analitice şi cele sintetice, o nouă categorie: aceea a propozițiilor sintetice a priori. Acestea, în opinia sa, sunt de natură intuitivă, şi existența lor este demonstrată în legătură cu categoriile transcendentale ale spațiului şi timpului, deoarece: descriind spațiul şi timpul, descriem de fapt particularii, ceea ce înseamnă că facem judecăți sintetice; descriind însă spațiul şi timpul, noi nu descriem impresii ale simțurilor, ci cadre permanente şi neschimbătoare ale acestora, ceea ce conduce la faptul că descrierile noastre sunt independente de impresiile simțurilor, deci sunt a priori. Kant nu este de acord cu opinia lui Leibniz conform căreia matematica pură ar utiliza numai propoziții analitice: „Pentru el, matematica pură nu este analitică; ea este sintetică a priori, pentru că se referă la (descrie) spațiul şi timpul.”[iv] Concepția sa despre felul propozițiilor matematicii este de maximă importanță, întrucât va fi extrem de influentă în cadrul discuțiilor despre fundamentele matematicii din secolul al-XX-lea. De asemenea, concepția sa despre infinit în matematică, şi distincția între infinitul potențial şi cel actual sau complet vor influența în mod deosebit aceste discuții, în măsura în care vor fi asumate de către curentul intuiționist.

PROBLEMA DE DESCHIDERE: ANTINOMIILE MATEMATICE. PARADOXUL LUI CANTOR

Prima antinomie cunoscută se datorează italianului Cesare Burali-Forti care, în 1897, a publicat-o într-un articol devenit celebru, *Una questione sui numeri transfiniti*, în revista *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

El a expus această antinomie în logica simbolică aşa cum era ea constituită de Peano şi de şcoala italiană, dar poate fi exprimată, în cea mai simplă formă a sa, în felul următor: a) orice serie de numere ordinale defineşte un număr ordinal; b) acest număr ordinal este mai mare cu o unitate decât cel mai mare număr ordinal al seriei date; c) seria ordinalelor (în ordinea mărimii lor) este bine ordonată.

Să considerăm acum seria tuturor numerelor ordinale; această serie defineşte un număr ordinal Ω, care este cel mai mare dintre toate numerele. În acest caz, seria tuturor numerelor ordinale conţine cel mai mare număr ordinal Ω, şi deci numărul ordinal al acestei serii nu este Ω, ci Ω+1, conform celor arătate mai sus.
Contradicţia este izbitoare: dacă Ω este numărul ordinal definit de seria tuturor ordinalelor, atunci nu Ω este numărul ordinal definit de seria tuturor ordinalelor, ci Ω+1. Deci cel mai mare număr ordinal nu este cel mai mare.

O contradicţie asemănătoare a fost descoperită de matematicianul german Georg Cantor în teoria mulţimilor.

În teoria mulţimilor, fiecărei mulţimi finite i se atribuie un număr, prin care se poate răspunde la întrebarea câte elemente are mulţimea respectivă. Datorită relaţiei de echivalenţă, se poate proceda astfel şi în cazul mulţimilor infinite. Acest număr se numeşte *cardinalul* sau puterea acelei mulţimi.

Atunci când se procedează la compararea diverselor mulţimi, se stabileşte, de fapt, o relaţie de ordine între cardinalele lor. În cazul mulţimilor finite, compararea este facilă: cardinalele lor se ordonează în funcţie de câte elemente au mulţimile respective: o multime cu mai multe elemente va avea un cardinal mai mare, în comparaţie cu altă mulţime, ce conţine un număr mai mic de elemente.

Dacă avem de a face, însă, cu mulţimi infinite, situaţia se complică, deoarece în cazul mulţimilor infinite, există mulţimi numărabile (cum este cazul mulţimii numerelor naturale, al cărei cardinal va fi mai mare decât orice număr natural, şi se va nota cu *a*), şi mulţimi nenumărabile, cum este cazul mulţimii numerelor reale. Cantor demonstrează cu ajutorul procedeului diagonal că mulţimea numerelor reale este nenumărabilă: luând un interval oarecare din mulţimea numerelor reale (de exemplu, intervalul deschis de la 0 la 1) şi exprimând zecimal toate numerele din acest interval, se demonstrează că se pot imagina la infinit numere reale cuprinse în acest interval care să depăşească orice posibilă corespondenţă 1 la 1 între membrii intervalului şi o mulţime numărabilă finită.

Cardinalul mulţimii numerelor reale va fi notat cu *c*, şi va fi, la rândul lui, asemeni lui *a*, mai mare decât orice număr real. Cardinalele *a* şi *c* nu caracterizează doar mulţimile menţionate, ci, în genere, mulţimile numărabile infinite, respectiv mulţimile nenumărabile infinite, despre acestea din urmă spunându-se că au puterea continuului.

Aşadar, dacă ar fi să facem o listă a cardinalelor cunoscute, aceasta va fi următoarea: întâi vin toate numerele naturale, la care se adaugă şi cardinalul mulţimii vide, 0, şi, deşi lista acestora nu se termină niciodată, *dincolo* de ele mai există cardinalul *a*, care este mai mare decât toate cardinalele finite, şi cardinalul *c*, care este mai mare decât *a*. Acestea sunt cardinalele *transfinite*.

În afară de *a* şi *c*, se poate demonstra că mai există o infinitate de cardinale transfinite, caracterizând mulţimile ce se pot forma atunci când se iau în calcul părţile lor. De ecemplu, în cazul mulţimii numerelor naturale, mulţimea părţilor ei va fi formată din: mulţimea vidă, apoi mulţimile cu un element, apoi mulţimile cu două elemente, şi aşa mai departe, ceea ce a condus, în teoria mulţimilor, la teorema:

Mulţimea părţilor unei mulţimi are un cardinal mai mare decât mulţimea însăşi.

Atunci când s-a pus problema dacă există un cardinal mai mare decât toate celelalte, teoria mulţimilor s-a găsit într-o situaţie dificilă: la prima vedere, ar părea posibil, acesta fiind cardinalul mulţimii tuturor mulţimilor.

Aici apare paradoxul, deoarece, conform teoremei enunţate anterior, dacă mulţimea tuturor mulţimilor ar avea cel mai mare cardinal, mulţimea părţilor ei ar avea un cardinal mai mare decât ea. Prin urmare, cel mai mare număr cardinal nu este cel mai mare.

Problema antinomiilor matematice este una de maximă importanţă, atât pentru logică, ce oferea aparatul simbolic pentru a le exprima pe acestea, cât şi pentru matematică, în corpul căreia aceste antinomii au apărut. Ele constituie unul dintre obstacolele cele mai mari în constituirea logicii ca ştiinţă matematică, dar şi în fundamentarea logică a matematicii. Importanţa maximă a acestor antinomii provine din aceea că ele pun sub semnul întrebării noţiuni fundamentale atât în logică, cât şi în matematică: noţiunile de mulţime, clasă, număr ordinal, număr cardinal, etc.

Paradoxuri de acest tip, apărând în chiar corpul gândirii matematice, au încetat a fi un simplu joc al gândirii, punând serioase probleme din punct de vedere al fundamentelor acestei discipline: „ Rând pe rând, paradoxurile lui Burali-Forti, Cantor, Russell, Richard ş. a., au spulberat ideea despre caracterul «ideal» al construcţiilor matematice, impunând şi aici, ca pretutindeni, principiul relativităţii cunoaşterii.”[v]

De aceea, descoperirea antinomiilor constituie un pericol nu numai pentru matematică, ci şi pentru întregul sistem al ştiinţelor deductive. Prin urmare, soluţionarea acestora a devenit, la sfârşitul secolului al-XIX-lea şi începutul secolului al-XX-lea, una dintre cele mai importante sarcini atât a matematicienilor, cât şi a logicienilor.

Încă de la Aristotel, logica a avut ca subiect modele formale de inferenţă; *Organon*-ul lui Aristotel a fost creat cu intenția de a fi, nici mai mult, nici mai puțin, decât un canon, sau un instrument ce ar da legile unei inferențe corecte. De abia de la mijlocul secolului al XIX-lea, însă, logica a început să fie privită ca o disciplină ce ar putea fi dzvoltată matematic, alături de alte ramuri ale matematicii. George Boole, Augustus DeMorgan, Ernst Schroder sau Charles Sanders Peirce sunt câteva nume sonore ce au descoperit posibilitatea de a dezvolta ceea ce se va numi o „algebră a logicii", o modalitate matematică de a modela legile abstracte ce guvernează inferența formală.

Această intenție a fost concretizată cu succes de George Boole în lucrarea *The Mathematical Analysis of Logic*, în 1847, prima aplicare sistematică a metodelor algebrei la logică. Acestei reuşite i se adaugă, şapte ani mai târziu, publicarea unei alte opere, *An Investigation of the Laws of Thoughs*, în care Boole dezvoltă analogia formală între operațiile logicii şi matematicii, arătând cum formule algebrice pot fi folosite pentru a exprima şi manipula relații logice.

Încercării lui Boole de a matematiza logica, i se adaugă, în aceeaşi perioadă, aceea de a logiciza matematica. Ideea reducerii matematicii la logică, preluată de la Leibniz, consta în esență din două obiective: mai întâi, se propunea definirea conceptelor matematicii în termeni de concepte pur logice, şi în al doilea rând, se propunea deducerea teoremelor matematice din axiome pur logice.

Deloc accidental, încercarea de a logiciza matematica a coincis cu un proces revoluționar ce dorea introducerea unei mai mari rigori în matematică. Dezvoltarea geometriilor neeuclidiene, legată de numele sonore ale lui Lobachevski, Bolyai, Riemann a condus la centrarea atenției pe metoda axiomatică şi pe cercetarea fundamentelor în general. Bolzano, Weierstrass, Dedekind şi Cantor au dezvoltat independent metode de a fundamenta numerele iraționale în termeni de numere raționale, şi bazându-se pe rezultatele acestora, Giuseppe Peano a fost capabil să dezvolte sistematic, nu doar o teorie a aritmeticii şi a numerelor raționale, dar o şi o teorie detaliată a limitelor reale. Rezultatele acestuia, expuse în lucrarea din 1889, intitulată *Arithmetics Principia*, arătau cum, pornind de la câteva noţiuni primitive, era în principiu posibil să se derive întreaga matematică într-o manieră riguroasă şi coerentă.

ESTE MATEMATICA PURĂ REDUCTIBILĂ LA LOGICĂ? LOGICISMUL

Cruciale în acest proces au fost introducerea cuantificatorilor şi dezvoltarea calculului cu predicate, pe care le datorăm, fără îndoială, lui Gottlob Frege. Reluând un ideal mai vechi, acela al lui Leibniz, Frege a dorit nu atât să reprezinte logica abstractă în formule, cât să reprezinte conţinuturi prin semne scrise, într-o manieră mai precisă şi mai clară decât e posibil prin limbajul natural. Recunoaştem aici acea „lingua characteristica" la care aspira Leibniz. Rezultatul a fost introducerea unui limbaj simbolic foarte general, potrivit pentru a exprima tipul de inferenţe formale utilizat în matematică. Reluând, de asemenea, structura propoziţională introdusă de Leibniz, în care predicatul este o proprietate a subiectului, şi interpretând enunţurile în termeni de funcţie-argument, Frege a reuşit să combine expresii reprezentând individuali şi predicate (proprietăţi şi relaţii) cu conectorii propoziţionali („şi", „sau", negaţia), şi cu cuantificatori („toţi", „unii"), într-un limbaj destul de puternic pentru a exprima până şi cele mai complicate enunţuri matematice.

În opera sa capitală, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkes (Scriere conceptuală; un limbaj formalizat al gândirii pure, modelat după limba aritmeticii)*, Frege creează ceea se va numi logica predicatelor: spre deosebire de logica propoziţiilor, a cărei extindere este, logica predicatelor nu poate fi interpretată ca algebră booleană. „Aici, Frege inovează la modul absolut, importanţa teoriei sale fiind cu totul covârşitoare: logica formală capătă astfel forță de propulsie, devine aptă să formalizeze structura mai fină a raționamentelor în care intervin propoziții existențiale şi generale, se dovedeşte în măsură de a unifica înăuntrul unei singure teorii, în lumina aceloraşi concepte fundamentale, analiza propozițiilor de predicație şi de relație.”[vi] Pentru prima dată se putea aplica riguros logica la matematică, pentru a studia fundamentele acesteia.

Lucrarea ulterioară, din 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung den Begriff der Zahl (Fundamentele aritmeticii. O cercetare logico-matematică asupra conceptului de număr)*, marchează un moment crucial în fundamentele matematicii. Aici Frege dezvoltă programul său logicist de fundare a aritmeticii. Dacă prima sa carte, *Begriffsschrift*, urmărea să aplice noul calcul logic pentru a deduce teoreme matematice, în lucrarea din 1884, Frege pune însăşi problema naturii propozițiilor aritmetice şi a conceptului de număr.

Centrală pentru această lucrare este critica pe care Frege o face lui Kant şi concepției acestuia conform căreia legile aritmeticii ar fi adevăruri sintetico-apriori, precum şi empirismului lui Mill. Asemeni lui Russell, mai târziu, Frege respinge şi concepția conform căreia legile aritmeticii ar fi adevăruri inductive.

Frege reia incercarea lui Lebniz de a demonstra propozițiile aritmeticii pornind de la definiții, dar programul său este unul mai complex, mergând mult mai departe în afirmarea caracterului analitic al propozițiilor matematicii. Propozițiile aritmeticii sunt, în opinia lui Frege, analitice şi a priori, ele au un caracter analitic întrucât sunt adevăruri logice: „Tentativa de a relava adevărurile aritmeticii în calitate de adevăruri logice are la Frege o bază incomparabil mai solidă decât la Leibniz. Se afirmă nu numai că matematica este o ştiință strict deductivă, ale cărei adevăruri decurg în formă pură din definiții admise inițial, dar se preconizează totodată să fie explicitată logica după care se desfăşoară demonstrațiile, se cer a fi precizate regulile de deducție pe care le folosim.”[vii].

R O S L I R
Revista Romana de Semio-Logica (Pe Internet)

Al doilea pas, la fel de important în întreprinderea lui Frege este acela de a arăta că înseşi noţiunile aritmeticii sunt de fapt noţiuni logice. Frege va stabili prin intermediul unei detaliate analize definiţia logică a numărului şi sugerează modul în care proprietăţile principale ale numerelor, relaţiile dintre ele, legile operaţiilor cu numere naturale pot fi traduse prin intermediul unor noţiuni pur logice.

Programul logicist al lui Frege viza formalizarea integrală a logicii şi aritmeticii şi prezentarea lor sub forma unui sistem deductiv formal, axiomatizat. Frege consacră acestui scop opera sa capitală, *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschiftlich abgeleitet (Legile fundamentale ale aritmeticii)*, în care, pe baza a cinci axiome, a unor idei logice primitive, a unor reguli de definiţie şi a unor reguli de deducţie, Frege derivă principalele teoreme ale aritmeticii şi defineşte noţiunile de bază ale aritmeticii drept construcţii logice. Este interesant de notat faptul că succesul lui Frege se leagă de numele acestei cărţi, însă într-un sens negativ, deoarece eşecul întreprinderii sale, arătat de Russell, după lectura acestei cărţi, în 1902, l-a adus în atenţia publicului larg.

Asistând la Congresul internaţional de filosofie de la Paris, din 1901, Russell a fost impresionat de comunicarea prezentată de matematicianul italian Giuseppe Peano; lectura lucrărilor lui Peano va fi continuată cu aceea a lucrărilor lui Frege. Atras de programul logicist, Russell abordează cu deosebită atenţie lucrările logicianului german, făcând, în 1901, o descoperire catastrofală pentru Frege, descoperire ce afectează nu numai sistemul formal fregeean, ci subminează înseşi fundamentele evidente, incontestabile de până atunci, ale logicii şi ale teoriei mulţimilor. Antinomia descoperită de Russell în sistemul lui Frege îl va conduce pe acesta din urmă să-şi abandoneze programul logicist, deschizând însă calea pentru Russell şi Whitehead, care vor fi continuatorii săi.

Paradoxul lui Russell

Una dintre ideile de bază ale logicismului lui Russell constă în aceea că regulile pentru aritmetica numerelor naturale şi conceptele fundamentale utilizate aici pot fi determinate pornind de la concepte din teoria mulţimilor şi logica relaţiilor.

În cadrul încercării sale de a oferi dovada derivabilităţii matematicii din logică, Russell s-a confruntat cu probleme care l-au condus spre dezvoltarea unei teorii, datorită căreia a devenit celebru; este vorba despre faimoasa *teorie a tipurilor*. Punctul de pornire în elaborarea ei a fost *paradoxul claselor*. Russell s-a confruntat cu această problemă atunci când a încercat să definească numerele naturale pornind de la conceptul de clasă. Acest paradox este o formă specifică a paradoxului general, impus încă din Antichitate, referitor la propoziţiile şi expresiile auto-referenţiale.

Paradoxul lui Russell ia naştere astfel: dacă ne referim la o clasă, o putem considera atât din punct de vedere extensional, cât şi din punct de vedere intensional. Vorbim despre o determinare extensională atunci când înţelegem clasele drept colecţii de obiecte, pe care în principiu le-am putea număra. Apoi, cu condiţia că am avea mijloacele de a identifica obiectele respective, tot ceea ce ne rămâne este să înţelegem noţiunea de conjuncţie logică. Problema nu este atât de simplă cum apare la prima vedere, şi Russell a observat dificultăţile cu care ne putem confrunta atunci când ne raportăm la clase din punct de vedere extensional. În primul rând, dacă propoziţiile matematice pot fi transformate în propoziţii despre clase, putem întâlni clase care au un număr infinit de elemente. Însă o conjuncţie infinită are o validitate dubitabilă, din punct de vedere logic: dacă, de exemplu, această conjuncţie este formată după o regulă, cum ar fi aceea a adunării, care conduce la serii infinite de numere naturale, ar putea părea posibilă enumerarea tuturor elementelor, însă, din punct de vedere practic, este logic că nu ne putem permite să facem acest lucru. În al doilea rând, există problema mulţimii vide, care este o clasă fără nici un membru; întrebarea este dacă o putem privi pe aceasta drept o colecție. În cel din urmă rând, apare încă o dificultate, în privința claselor cu un singur membru. Din rațiuni logice, trebuie să distingem o clasă cu un singur element de unicul său element. Generalizând, Russell consideră că este eronat să gândim colecțiile de obiecte ca existând alături de elementele ce le compun, iar exemplus său preferat este acela în care o pereche de încălțări ar putea fi privită ca o colecție de nu de două, ci de trei elemente: pe lângă cele două încălțări luate separate, ar apărea şi al treilea element, perechea formată din cele două. Dacă ar fi legitim să gândim astfel, s-ar putea ajunge la a vorbi cu sens despre totalitatea lucrurilor existente ca despre o totalitate care nu este finită, şi astfel ar apărea o contradicție. Aceasta pentru că este demonstrabil, din punct de vedere matematic că, dată o colecție de n elemente, putem sorta din această colecție 2^n submulțimi. Cantor însă arătase că deşi numărul n este infinit, 2^n trebuie să fie întotdeauna mai mare decât n. Dar aceasta înseamnă că dacă toate colecțiile de lucruri posibile sunt considerate în totalitatea lucrurilor care există, obținem rezultatul contradictoriu în care numărul de lucruri care există este mai mare decât totalitatea lucrurilor existente. Avem astfel, după expresia lui Russell, „o dovadă aritmetică precisă că există mai *puține* lucruri în cer şi pe pământ decât cele pe care le imaginăm în filosofia *noastră*.”[viii]

În multe cazuri, poate părea lipsit de importanță dacă o clasă este definită intensional sau extensional. În cazul unei determinări extensionale, se poate, cel mult, spune că ar fi mai exactă, pentru că este evident că nu poate apărea nici o îndoială dacă o entitate este sau nu membră a clasei respective. În multe contexte, însă, apare necesitatea de a numi sau a ne referi la clase care nu pot fi determinate extensional. După cum s-a văzut, acest lucru este valabil pentru clase care au un număr infinit de elemente, cum sunt clasa numerelor prime sau clasa tuturor numerelor. În acest caz, Russell operează prin determinarea intensională a claselor, adică privind clasa drept o colecție de obiecte care satisfac o anumită funcție propozițională.

O clasă determinată constă, în opinia lui Russell, din entităţi care fac adevărată o anumită funcţie propoziţională. Astfel, clasa oamenilor constă din entităţi care fac adevărată funcţia propoziţională „x este om”, clasa numerelor prime, din entităţi care fac adevărată pe „x este număr prim”. În acelaşi mod, se pot forma clase ale căror elemente să fie, la rândul lor, clase, cum ar fi clasa claselor numărabile.

Dacă însă nu sunt definite *cadrele* după care se poate conduce o construcţie a unei clase din alte clase, atunci va surveni ceea ce în literatura de specialitate a fost numit *paradoxul claselor*. Şi aceasta fiindcă se poate afirma în mod justificat despre anumite clase că ele nu pot constitui un element al înseşi acestor clase (de exemplu, *clasa preşedinţilor României*, care, evident, nu este un preşedinte, deci nu se poate auto-conţine). Dimpotrivă, în alte cazuri, pare legitim să putem spune că respectivele clase pot constitui un element inclus în ele însele (de exemplu, *clasa claselor numărabile*, care este, la rândul ei, o clasă).

Astfel, poate părea corect ca prin funcţiile propoziţionale „x este un element care se conţine pe el însuşi” şi „x nu este un element care se conţine pe el însuşi” să fie formate două clase. În cazul în care ne punem problema dacă clasa determinată prin ultima funcţie propoziţională menţionată – deci clasa claselor care nu se conţin pe ele însele ca element – se conţine sau nu pe sine însăşi, ajungem la o contradicţie. Dacă presupunem că această clasă se conţine ca element pe sine însăşi, atunci urmează că ea nu se conţine pe ea însăşi, deoarece am definit-o ca acea clasă care *nu* se conţine pe ea însăşi. Iar dacă presupunem că această clasă nu se conţine ca element pe ea însăşi, atunci urmează că ea *este* un element din sine însăşi, deoarece, în acest caz, satisface funcţia propoziţională „x nu este un element care se conţine pe el însuşi”.

Paradoxul claselor – cu timpul a fost numit *paradoxul lui Russell* – poate părea o chestiune de rafinament tehnic. Trebuie să luăm în considerare însă două contexte care ne vor permite să înţelegem de ce, pentru Russell, această antinomie nu poate fi evitată. Dacă suntem de părere, împreună cu Russell, că

R O S L I R
Revista Romana de Semio-Logica (Pe Internet)

matematica – considerată încă din Antichitate drept paradigmă a cunoaşterii clare şi univoce – poate fi întemeiată în mod apodictic doar prin demonstrarea fundamentelor ei logice, atunci prezenţa unor astfel de antinomii în demersul de întemeiere devine problematică.

Teoria tipurilor

Russell califică situaţia nefastă a paradoxului claselor şi a altor antinomii similare drept o formă inacceptabilă de autoreferinţă sau reflexivitate. Este vorba de formarea unor structuri de ansamblu care nu pot fi acceptate. Astfel, Russell încearcă să se detaşeze de aşa-numitul *principiu al cercului vicios* : această formă inacceptabilă a autoreferinţei apare atunci când este avansat un enunţ general despre toate cazurile unui anumit gen, fapt care conduce la apariţia unui nou caz, care *este* şi *nu este* de acelaşi gen cu sus-numitele cazuri.

Sau, cu cuvintele lui Russell, „Ceea ce presupune o colecţie luată în totalitatea ei nu trebuie să fie un membru al colecţiei."[ix] Cu ajutorul acestui principiu, Russell consideră că paradoxele logico-matematice pot fi evitate. Iată cum aplică Russell acest principiu în logica matematică. O clasă este un obiect care derivă dintr-o funcţie propoziţională Φx şi presupune funcţia: x sunt toţi aceia care verifică Φx. Dacă notăm clasa tuturor acelora care verifică Φx cu simbolul x(Φx) – adică clasa determinată de funcţia propoziţională Φx - simbolul Φ[x(Φx)] trebuie privit fără sens – *meaningless*, după principiul cercului vicios. Simplu spus: argumentul unei funcţii propoziţionale Φx nu poate fi chiar funcţia sau clasa determinată de funcţie.

Russell descoperă paradoxul claselor în timp ce pregătea lucrarea ce va apărea în 1903 sub numele de *The Principles of Mathematics*. Într-un apendice la această lucrare el va oferi soluţia acestui tip de paradoxe prin celebra sa *teorie a tipurilor*. Deşi avansează această teorie pentru a soluţiona contradicţiile ivite în teoria mulţimilor şi în logica matematică, Russell consideră că ea nu serveşte numai acestui scop: „ea corespunde, de asemenea, într-o mare măsură simţului comun, ceea ce o face credibilă în sine”[x].

În forma sa cea mai simplă, teoria tipurilor se sprijină pe principiul conform căruia o funcţie propoziţională presupune totalitatea posibilelor sale argumente, ceea ce echivalează cu a spune că sensul său nu este specificat până nu se specifică acea categorie de obiecte care o pot satisface. Rezultă că în această categorie de obiecte nu putem include ceva care să fie definit în termenii funcţiei înseşi. În lumina acestei constatări, soluţia lui Russell la paradoxul claselor este următoarea: a spune despre clasa tuturor claselor care se autoconţin că este sau nu un membru al ei însăşi (se autoconţine) nu este nici adevărat, nici fals, ci lipsit de sens[xi].

Ceea ce obţinem este un sistem în care funcţiile propoziţionale, şi prin urmare popoziţiile, sunt aranjate într-o anumită ierarhie. Aceasta va fi o ierarhie de tipuri. Vom avea astfel tipul cel mai de jos – indivizii; proprietăţile indivizilor vor fi obiecte logice de tipul al doilea; proprietăţile proprietăţilor indivizilor vor fi obiecte logice de tipul al treilea, ş.a.m.d. Tradusă în termeni de funcţii propoziţionale, ierarhia se dezvoltă în felul următor: pe primul nivel avem funcţii care au drept argument indivizii; pe următorul nivel vom avea funcţii care au drept argument funcţiile de ordinul întâi, pe nivelul al treilea vom avea funcţii ce au drept argument funcţiile de ordinul doi, ş.a.m.d.[xii]

Obiectele care satisfac funcţiile la un anumit nivel constituie un anumit tip, şi principiul ce ghidează construcţia constă în aceea că ceea ce poate fi asertat, pozitiv sau negativ, despre obiectele unui tip, nu poate fi asertat cu sens despre obiectele unul tip diferit. Formularea noastră este dată într-un limbaj realist, dar este uşor de observat că principiul poate fi enunţat sub forma unei reguli privind combinaţiile de simboluri ce pot fi considerate cu sens.

Existând o ordine a propoziţiilor, corespunzătoare celei a funcţiilor propoziţionale, în care vom avea: enunţuri, enunţuri despre enunțuri, enunțuri despre enunțurile despre enunțuri, ş.a.m.d., rezultă printre altele, că nu putem atribui cu sens orice proprietate propozițiilor în general, ci doar cel mult unor propoziții de un tip sau altul, şi astfel, paradoxele pot fi evitate.

Virtuți şi limite ale simbolismului din Principia Mathematica

Semnificația filosofică a întregului efort logisist este că s-a demonstrat că adevărurile matematice sunt independente de gândirea umană, de caracteristicile structurale ale modului nostru de gândire.

Adevărurile matematice au fost demonstrate ca fiind necesare şi obiective pentru că depind numai de anumite reguli logice fundamentale care sunt valabile independent de spirit sau de lumea empirică. Noul limbaj logic este: *formal*, pentru că regulile care îi conduc termenii sunt cunoscute cu exactitate; *puternic*, prin faptul că, spre deosebire de logica tradițională, aristotelică, este capabil de a exprima o diversitate extrem de bogată de înțelesuri. Astfel, logica aristotelică, ce opera cu relații între clase, devine doar un mic fragment al noii logici, care poate opera cu ansamble de propoziții şi cu structuri interne de propoziții.

Russell a văzut în noul simbolism logic o cale de a aborda probleme filosofice mai vechi. El era convins că noua logică pune la dispoziție o *limbă ideală sau perfectă*. Părerea sa era că limbajul obişnuit s-a dezvoltat pentru anumite scopuri, ceea ce arată că el este nepotrivit pentru exprimarea conceptelor şi problemelor filosofice. În lucrarea *The Analysis of Mind*, Russell afirmă că dacă limbajul ar fi fost inventat de oameni de ştiință cu scopuri ce țin de filosofie şi logică, atunci ar fi rezultat exact simbolismul elaborat de el. Precizia, claritatea şi lipsa de ambiguitate posibile în cadrul noii logici promiteau găsirea unei căi de a reformula problemele filosofice astfel încât soluția lor să devină evidentă, sau chiar să facă să dispară, ca pseudoproblemă, problema inițială, dacă aceasta se dovedea a nu fi autentică.

Trăsăturile acestui sistem sunt sintetizate astfel de către Anton Dumitriu[xiii]:
„1. Sistemul logico-matematic din *Principia mathematica* este primul sistem logic complet şi explicit axiomatizat.
2. El este primul sistem logic (aproape, s.n.) complet formalizat, doarece nu ține seamă decât de semne şi de regulile cu ajutorul cărora se construiesc formule din aceste semne."

Această din urmă trăsătură este de maximă importanță, deoarece ridică o problemă esențială: până unde se întinde puterea unui simbol de a primi o semnificație? Vom vedea, în continuare, că aceasta va fi una dintre limitele esențiale nu numai a logicismului, dar şi a formalismului. Întreaga logică simbolică este creată pentru a asigura deducției rigoare matematică; problema care apare este cum putem avea certitudinea că un *joc* de simboluri poate reprezenta un proces deductiv, şi până unde se întinde această posibilitate?

Folosul simbolismului logic este indiscutabil. Bertrand Russell subliniază acest lucru în *Prefața* la *Principia Mathematica*: „Adoptarea regulilor în procesul deductiv ajută intuiția în regiuni foarte abstracte (...) Şi astfel mintea este condusă să construiască şiruri de raționamente în care imaginația ar fi cu totul incapabilă să se susțină singură fără ajutor simbolic."[xiv]
Utilizarea simbolului nu este numai avantajoasă, dar de la un anumit grad de complexitate a gândirii, apare ca o necesitate: cu ajutorul unui simbol se pot concentra şi efectua operații complexe mintale care, fiind bine cunoscute, nu mai au nevoie să fie detaliate, ci numai simbolizate, rezultatul apărând automat. Matematica utilizează astfel de notații simbolice, care acoperă largi procese mintale, în mod frecvent. De exemplu, un simbol de integrare a unei funcții:

$$\int f(x)d(x),$$

Concentrează în el o sumă de raționamente extrem de delicate care nu mai sunt repetate, ci sunt doar „reprezentate" prin simbol. Simbolul desfăşoară apoi o serie de operaţii automate, care conduc la un rezultat univoc.

Totuşi „acest sistem urmează să fie perfecţionat. El este, pe de o parte, un sistem perfectibil ca orice sistem ştiinţific, iar pe de altă parte a pornit cu câteva dificultăţi iniţiale”[xv]. Este vorba despre faptul că Russell nu a reuşit să formalizeze anumite reguli din sistemul său, cum ar fi regula substituţiei, pe care acesta nu o enunţă în mod formal, ci în limbajul obişnuit intuitiv. El însuşi o recunoaşte: „Acest principiu se sustrage expunerii formale şi indică un anumit eşec al formalismului în general.”[xvi] Acesta este un indiciu clar că Russell nu a reuşit să „izgonească complet intuiţia din sistemul său şi totul să fie numai semn şi regulă a semnelor”[xvii]. În plus, un alt neajuns al sistemului lui Russell este însuşi caracterul celebrei sale teorii a tipurilor. Contradicţiilor pe care le aducea cu sine matematica transfinită, Russell le va oferi ca soluţie această teorie. Rămâne însă de văzut în ce măsură principiul teoriei tipurilor este unul logic, sau este, mai degrabă, o convenţie adoptată pe parcursul demersului de fundamentare logică a matematicii. Se doreşte teoria tipurilor a fi *prescriptivă* pentru matematica transfinită, sau doar un procedeu de evitare, şi nu de soluţionare a paradoxelor?

Am văzut cum teoria mulţimilor permite alcătuirea de propoziţii despre toate elementele claselor finite şi infinite ale unui număr cardinal oarecare, de exemplu despre clasa tuturor numerelor naturale, clasa mai mare a tuturor subclaselor acestei clase, clasa şi mai mare a tuturor subclaselor clasei menţionate anterior, ş.a.m.d. Dar, presupunând că există clasa tuturor numerelor cardinale, atunci această presupunere, care nu este interzisă de teoria lui Cantor, este incompatibilă cu teoria sa conform căreia nu există un număr cardinal maxim. Teoria tipurilor a lui Russell pare să rezolve această antinomie, interzicând formarea unei clase a tuturor numerelor cardinale.

O obiecţie fundamentală pe care o aduce Stephen Körner în lucrarea *Introducere în filosofia matematicii* este aceea că principiul ce interzice formarea acestui tip de totalităţi nu este unul logic, ci are doar valoare de remediu ad-hoc: „Principiile pe baza cărora în formalismele logiciste, în particular în *Principia Mathematica*, sunt evitate antinomia celui mai mare cardinal împreună cu antinomia claselor tuturor claselor care nu se conţin pe ele însele ca element, precum şi alte antinomii sunt din nefericire principii care nu sunt logice – oricare ar fi sensul acceptat al cuvântului – nici în mod evident, nici prin demonstraţie. Ele au, şi există un consens general în această privinţă, caracter de remedii *ad-hoc*. Cei care le propun nu pretind că au diagnosticat sursa bolii pentru care ei prescriu aceste remedii, ci pur şi simplu exprimă speranţa că în felul acesta contradicţiile vor fi evitate."[xviii]

Dacă este legitim să aplicăm, numai provizoriu, astfel de remedii, atunci la fel de pertinente pot apărea şi alte atitudini filosofice, cum ar fi, de exemplu, cea a formaliştilor care sunt de părere că este util să înlocuim conceptul care produce confuzie, printr-un altul, „sănătos", care să servească aceluiaşi scop. Este ceea ce au încercat Hilbert şi şcoala sa.

ESTE MATEMATICA SIMPLĂ UTILIZARE DE SEMNE ÎN CALCULE? FORMALISMUL

Deschidem astfel discuţia despre o altă linie de gândire, cu o altă rădăcină istorică. Dacă în Leibniz şi-au găsit logiciştii principiile conducătoare, Kant ajunge să anticipeze principiile coordonatoare ale celorlalte două mişcări moderne din filosofia matematicii: formalismul şi intuiţionismul. Ne vom ocupa în cele ce urmează de prima dintre aceste două mişcări.

Dacă Frege şi Russell au respins împreună concepţia psihologistă kantiană, Hilbert o va accepta pe aceasta, în măsura în care îşi propune să arate că „...ceea ce există ca supoziţie în formarea inferenţelor logice şi în efectuarea operaţiilor logice este deja dat în reprezentare (*Vorstellung*): adică anumite obiecte concrete extralogice, care sunt prezente intuitiv ca experiență nemijlocită şi care constituie substratul întregii gândiri.”[xix]

Ceea ce doreşte Hilbert este să arate că dacă matematica se mărgineşte la descrierea obiectelor concrete de un anumit fel şi a relațiilor logice dintre aceste descrieri, atunci nu pot apărea contradicții în interiorul ei. Conceptul de infinitate actuală al lui Cantor, nedescriind nici un obiect concret, nu poate genera antinomii în matematica aceasta. Însă acest lucru nu înseamnă că Hilbert ar abandona matematica transfinită a lui Cantor, aşa cum o vor face intuiționiştii, ci mai degrabă, el va încerca o împăcare a matematicii concrete, cu teoria abstractă şi transfinită a lui Cantor. El va distinge noțiunile concrete ale matematicii finite de cele ideale ale matematicii transfinite, adăugându-le pe acestea din urmă primelor, într-un sistem a cărui necontradicție îşi propune să o demonstreze. În expunerea lui Hilbert, matematica clasică are ca nucleu un conținut perceptibil, la care se adugă obiecte fictive, imperceptibile, în particular, diferite totalități infinite. A demonstra coerența internă a unui sistem de propoziții echivalează cu a arăta că acest sistem nu conține două propoziții dintre care una să fie negația celeilalte. În cazul sistemelor foarte simple este uşor să se alcătuiască o listă a tuturor propozițiilor sistemului, şi să se verifice lista din punct de vedere al coerenței. În cazul sistemelor mai complexe, este nevoie ca sistemul să fie delimitat cu precizie şi să fie în întregime controlabil.

Hilbert considera că obiectele unui domeniu ştiințific pot fi ordonate într-un sistem de concepte, astfel încât fiecărui obiect din domeniul respectiv să-i corespundă un concept al sistemului, iar fiecărui fapt din cadrul domeniului o relație logică între concepte. Sistemul de concepte astfel imaginat va fi teoria respectivului domeniu ştiințific. Dacă dorim să dovedim că o anumită teorie este necontradictorie, adică în cadrul ei nu apar paradoxe, este de ajuns să imaginăm un model al acestei teorii. Teoria pentru care se construieşte modelul este consistentă, dacă sistemul construit de noi este consistent: „În cadrul disciplinelor fizice este suficient să reducem problema noncontradicției acestora la necontradicția aritmeticii, necontradicția acesteia la necontradicția teoriei mulțimilor, iar pe aceasta la necontradicția unui sistem logic de tip axiomatic.”[xx]

În acest fel, formalismul hilbertian pătrunde pe tărâmul logicii; Hilbert va utiliza moştenirea celor pe care îi critică: el nu a avut nevoie să elaboreze un simbolism nou pentru a-şi susține întreprinderea, dispunând de simbolismul din *Principia Mathematica* a lui Russell şi Whitehead. El nu a făcut altceva decât să adapteze simbolismul acestora la scopurile sale.

„Hilbert şi-a dat seama de la început că nu poate reconstrui bazele matematicilor fără logică şi că, pe de altă parte, nici logica nu poate fi constituită fără să implice noțiuni matematice, cum este, de pildă, noțiunea de număr întreg. De aceea Hilbert se decide să construiască deodată şi paralel logica şi matematica.”[xxi]

Spre deosebire de logicişti, Hilbert nu considera că matematica s-ar reduce la logică, ci că cele două discipline trebuie reconstruite împreună. În articolul din 1904 intitulat *Uber die Grundlagen der Logik und Mathematik (Despre fundamentele logicii şi matematicii)*, Hilbert propune pentru prima dată un program de eliminare a paradoxurilor descoperite în matematică prin axiomatizarea logicii, aritmeticii, analizei şi teoriei mulțimilor. Din acest articol transpare încrederea sa în metoda axiomatică, pe care o considera, conform W. Kneale şi M. Kneale [xxii] un instrument adecvat spiritului uman şi indispensabil în orice cercetare exactă în orice domeniu.

În dorința sa de a demonstra consistența unui sistem ca acela al matematicii, Hilbert va ajunge la concluzia că acest lucru se poate realiza numai dacă se va raționa nu în interiorul sistemului, aşa cum se încercase până atunci, ci din afara sistemului in cauză, adică raționându-se *despre* sistem, deci la un nivel mai înalt, despre formulele în care este exprimat sistemul: „Matematicianul de la Gottingen a luat astfel limbajul matematic separat, l-a desfăcut în elementele sale pentru a ridica edificiul logicii noi. Autorul acestei logici i-a dat la început numele de *meta-matematică*...”[xxiii]

Logica sa va studia astfel raţionamentul în el însuşi; forma finală a acestei logici noi va fi expusă în lucrarea *Grundzuge der theoretischen Logik*. Ea va consta într-un sistem de simboluri, care, date fiind anumite relaţii iniţiale între aceste simboluri, va ţese o reţea susceptibilă de a fi dezvoltată necontenit. Această logică va fi strict formală, deoarece din datele primitive nu se consideră decât capacitatea lor de a fi ordonate într-un fel sau altul. Formalizarea unei teorii, din punctul de vedere al lui Hilbert, nu echivalează cu izgonirea intuiţiei în cadrul preocupărilor sale. Dimpotrivă: „Introducând formalizarea nudă, Hilbert rupe legătura cu operaţia propriu zisă, naturală, a invenţiei unei teorii. Dar numai în drept, şi nu în fapt. Pe deasupra tuturor intuiţiilor concrete, logica lucrează cu o anume intuiţie, în care semnele – simboluri – pot fi combinate, după libertatea lor, într-un anume chip. E o intuiţie fără imagini, care lucrează într-o lume abstractă, unde entităţile care o populează sunt simple litere...”[xxiv]

Semnul, prin configuraţia sa, are două caractere: el este, pe de o parte, depozitarul unei reguli formale; pe de altă parte, fiind lipsit de conţinut, are o mobilitate completă în domeniul sensibilului, orice conţinut intuitiv putându-i-se substitui. Este ceea ce au remarcat Russell şi Whitehead, în efortul lor de constituire a simbolismului logic din *Principia Mathematica*. Tot ceea ce s-a înfăptuit în logică, după apariţia monumentalei lor opere, se leagă de rezultatele pe care aceştia le-au obţinut. Este şi cazul lui Hilbert: simbolismul utilizat de el nu diferă decât ca scriere, având însă avantajul de a fi mai compact. Cu ajutorul simbolurilor logice - independente de semnificaţie – şi al formulelor ce exprimă relaţiile dintre acestea, se poate opera mecanic, automat, logica devenind astfel un fel de algebră universală, în care se poate exprima orice teorie. Hilbert va perfecţiona din punct de vedere formal sistemul lui Russell, încercând, la rândul său, să refacă logic şi să fundamenteze matematica, arătând cum, cu ajutorul noii sale logici, paradoxurile pot fi înlăturate.

Aşa cum am menţionat anterior, metoda lui Hilbert de a fundamenta matematica, consta în a construi o teorie a acestei, un sistem a cărui necontradicție urma să o demonstreze. Dacă acest scop ar fi îndeplinit, atunci s-ar rezolva contradicțiile atât de chinuitoare apărute în interiorul matematicii. O teorie matematică constă într-un corp de axiome – propoziții primitive – la care se adaugă propozițiile derivate din acestea prin reguli de deducție.

Hilbert va formaliza aritmetica, demonstrând necontradicția acesteia. În *Grundlagen*, el va formaliza complet geometria elementară, arătând şi cazul acestei ramuri a matematicii necontradicția sistemului axiomatic pe care l-a creat. El va demonstra că orice element al geometriei euclidiene se poate înlocui cu elemente aritmetice şi că toate relațiile stabilite de axiome se traduc prin relații aritmetice exacte între elementele aritmetice corespunzătoare. În acest fel, dacă geometria euclidiană nu ar fi necontradictorie, contradicția ar trebui să se manifeste printr-o contradicție aritmetică. Dar cum demonstrase deja că aritmetica este necontradictorie, compatibilitatea axiomelor geometriei este astfel asigurată, şi cu aceasta necontradicția întregii geometrii.

Construind un model formal pentru raționamentul matematic, Hilbert nu a vrut să imagineze un simplu joc de simboluri private de orice conținut – aşa cum i s-a reproşat de către Brouwer; simbolurile, nefiind definite, acceptă mai multe conținuturi intuitive: „Cu alte cuvinte, o teorie formală este auaceptibilă de mai multe interpretări, tocmai fiindcă este independentă de orice interpretare”[xxv]; dacă este să vorbim despre un joc al formulelor, atunci acesta cântăreşte deosebit de greu, întrucât este de o maximă importanță filosofică, fiind condus după anumite reguli determinate ce exprimă tehnica modului nostru de a gândi. Aceste reguli formează un sistem închis, în opinia lui Hilbert, ce poate fi descoperit şi stabilit în formă definitivă.

Intenția fundamentală a lui Hilbert este[xxvi] aceea de a descrie activitatea noastră de înțelegere, de a crea un protocol al regulilor după care gândirea noastră actuală funcționează. Gândirea se desfăşoară în paralel cu activitatea vorbirii. Noi formăm propoziții pe care le înlănțuim într-o ordine succesivă. În cuvintele lui Hilbert, dacă vreo totalitate de observaţii şi fenomene merită să devină obiectul unei investigaţii riguroase şi profunde, atunci investigaţia condusă de el este cea potrivită. Aceasta sugerează că regulile acestui joc nu sunt altele decât legile fundamentale ale gândirii umane. Esenţa formalismului lui Hilbert constă în această credinţă că mare parte din gândirea matematică are, în fond, un caracter formal-algebric sau sintactic. Scopul formalismului este acela de a identifica formele fundamentale ale gândirii umane. Aceste forme fundamentale, ce pot fi imaginate drept teorii-formă reprezintă de fapt patternuri după care funcţionează gândirea umană şi care pot fi umplute cu o diversitate foarte bogată de conţinuturi.

Problema care poate apărea, şi reproşul ce i-a fost adus pe drept lui Hilbert, este că nu orice propoziţie poate fi exprimată în acest limbaj pur formal. Nu ne garantează nimeni că în cadrul procesului matematic nu vom întâlni, la un moment dat, fraze care nu vor putea fi exprimate în limbajul simbolic, şi care nu vor putea fi justificate numai pe baza formulelor şi regulilor unui sistem formal: „Programul ingenios al lui Hilbert (...) a fost să obiectiveze adevărurile matematicii clasice, astfel încât trăsăturile perceptuale ale obiectelor, sau ale proceselor prin care ele sunt produse, să corespundă trăsăturilor logice ale propoziţiilor matematice. Formulele-teoreme sunt, ca să zicem aşa, corpurile, iar adevărurile fără corp sunt suflete – fiecare suflet având cel puţin un corp. Acest program (...) nu poate fi realizat. Gödel a demonstrat că orice concretizare a matematicii clasice într-un formalism trebuie să fie incompletă; există totdeauna adevăruri matematice care nu sunt concretizate în formule-teoreme.”[xxvii]

Într-adevăr, Gödel va fi cel care va arăta, în 1931, limitele sistemului formal al lui Hilbert. În primul rând, el va demonstra că teoriile matematice nu pot fi formalizate complet, şi în al doilea rând, că nu se poate demostra consistenţa unui astfel de sistem în cadrul sistemului însuşi, nici chiar dacă sistemul este unul elementar, cum este cazul aritmeticii sau al geometriei. Este vorba despre cele două celebre teoreme de incompletitudine ale lui

Gödel: el a arătat că pentru orice sistem formal T, dacă T este consistent, atunci există o propoziție G a sistemului, astfel încât nici G şi nici contradictoria ei nu pot fi teoreme ale sistemului (prima teoremă de incompletitudine); în al doilea rând, Gödel va arăta că dacă formulăm în sistemul T un enunț, de tipul Con_T, despre care există motive să se susțină că exprimă consistența sistemului T, acesta nu poate fi demonstrat în sistemul T dacă T este consistent (a doua teoremă de incompletitudine). În particular, dacă aritmetica lui Peano este consistentă, atunci însăşi consistența ei nu poate fi stabilită cu metodele sistemului. Acelaşi lucru se întâmplă şi cu analiza clasică, teoria mulțimilor, şi orice alt sistem formal suficient de bogat. Dacă teoria este consistentă, atunci consistența sa nu se poate demonstra în cadrul sistemului însuşi.

Deşi efortul lui Hilbert nu a avut efectul pe care acesta şi l-a dorit, acela de a îndepărta o dată pentru totdeauna problemele ce apar în fundarea matematicilor, el a stabilit teoria demonstrației ca domeniu valoros în cercetarea matematică. Provocarea lui Cantor nu primit o rezolvare prin formalismul lui Hilbert, aşa cum nu primise nici prin logicismul lui Russell şi Whitehead.

ESTE MATEMATICA REDUCTIBILĂ LA CONSTRUCȚII ALE INTUIȚIEI TEMPORALE? INTUIȚIONISMUL

O altă soluție propusă pentru eliminarea paradoxelor logico-matematice este teza intuiționistă. După L. E. J. Brouwer, conducătorul modern al curentului intuiționist, este necesar a se face o distincție categorică între două activități diferite: pe de o parte, construcția matematică, pe de altă parte, activitatea lingvistică, aceasta din urmă constând în totalitatea propozițiilor despre rezultatele construcției, precum şi tot ce înseamnă aplicare a principiilor logice de raționament în aceste propoziții. Deosebirea dintre aceste două activități este una fundamentală, iar ignorarea ei este la fel de periculoasă atât pentru limbajul filosofic, cât şi pentru cel matematic. Brouwer se întreabă dacă reprezentarea logico-lingvistică este întotdeauna adecvată construcției matematice: nu cumva reprezentarea depăşeşte limitele construcției? Aici identifică filosoful olandez marea problemă de până la el în filosofia matematicii, şi eroarea fundamentală a celor două curente: logicismul şi formalismul. Ea constă în faptul că atât logiciştii cât şi formaliştii aplică legea terțului exclus în raționamentele despre sisteme infinite de obiecte matematice, permițând astfel limbajului să depăşească şi să denatureze realitatea matematică.

Din punctul său de vedere, paradoxurile logice infirmă principiul terțului exclus, ele oferind propoziții care nu pot fi declarate nici adevărate, nici false: principiul terțului exclus se poate aplica cu sens doar mulțimilor finite de elemente. El va formula, în consecință, următorul principiu: orice propoziție care are un conținut trebuie să indice una sau mai multe stări de lucruri bine determinate şi accesibile experienței noastre. Consecința acestui principiu este că: „în domeniul colecțiilor infinite nu mai are nici un sens, după Brouwer, să spunem că un element *a* aparține unui ansamblu *E*, fără să putem indica acel element; cum putem spune atunci că o colecție are o infinitate de elemente, dacă nu putem – fiindcă în domeniul infinitului nu putem opera această intuiție în mod total – să arătăm fiecare membru al colecției?” [xxviii]

El acuză pe cei ce au încercat să dea o soluție paradoxurilor din matematică de faptul că au operat o extrapolare ilicită a principiului terțului exclus, adecvat doar mulțimilor finite, la mulțimile infinite de elemente. Consecința acestei extrapolări este deosebit de gravă pentru matematică, deoarece, în opinia lui Brouwer, principiul terțului exclus trebuie să fie respins ca instrument de descoperire a noilor adevăruri matematice. El consideră că limitarea matematicii la metodele finite ale matematicii formaliste ar fi o gravă lovitură pentru structura acesteia. Matematica, aşa cum era practicată în epoca sa, consta din două părți separate: o matematică autonomă, şi o matematică a cărei certitudine depindea de limbaj şi logică. Pentru matematica autonomă, existența exactă, certitudinea absolută şi necontradicția erau universal recunoscute, independent de limbaj şi fără demonstrație. Exista însă şi o matematică neautonomă, ce consta în teoria continuului numerelor reale. Aceasta depindea de logică şi de limbaj.

În acest punct îşi afirmă Brouwer originalitatea, preluând anumite idei de la Kant: „Matematica, după Kant şi Brouwer, presupune o intuiție care diferă pe de o parte şi de percepția senzorială, fiind o formă invariantă a acesteia, pe de altă parte diferă şi de aperceperea conexiunilor logice dintre concepte sau propoziții. După cum experiența, să zicem, a ascensiunii unui munte nu trebuie confundată cu descrierea şi comunicarea ei lingvistică pentru alții, tot astfel experiența intuițiilor şi construcțiilor matematice nu trebuie confundată cu descrierea şi comunicarea *sa* lingvistică."[xxix]

Matematica este, după Brouwer, în esență, independentă atât de limbaj cât şi de logică, iar dacă limbajul în care este exprimată construcția matematică este contradictoriu sau nu, acest lucru este lipsit de importanță pentru matematică.

Considerând matematica a fi independentă de logică, Brower va respinge fundamentarea ei prin teoria mulțimilor, în care au apărut paradoxele. Dacă există paradoxe, ele nu au nici o legătură cu matematica. Explicația apariției acestora o găseşte Brouwer în această confuzie dintre activitatea matematică şi limbajul matematic. Practicând corect activitatea matematică, nu putem ajunge la paradoxuri ce s-ar cere a fi rezolvate prin mijloace extra-matematice. O interpretare corectă a matematicii presupune, în opinia lui Brouwer, o teorie anticantoriană, iar o interpretare corectă a logicii presupune o teorie antilogicistă şi antiformalistă.

Brouwer încearcă să reconstruiască matematica pe alte baze decât cele logico-matematice. Esențială în acest demers este celebra sa teorie a intuiției, o teorie destul de complicată, ce „conține elemente de tip aristotelic, kantian, dar şi de tip berkeleyan şi chiar hegelian".[xxx] Ceea ce este interesant de subliniat, pentru discuția noastră, este faptul că, în cadrul matematicii, aşa cum este ea concepută de către Brouwer, nu sunt admise decât entități matematice, şi operații cu astfel de entități, care pot fi construite intuitiv, fie direct, fie indirect. Ceea ce nu poate fi construit pe cale intuitivă, devine în concepția lui Brower, lipsit de sens. Exemplul cel mai important de astfel de entități lipsite de sens îl constituie infinitățile actuale ale lui Cantor, respectiv numerele transfinite.

Aşa cum am subliniat, în expunerea paradoxului lui Cantor, puterea sau cardinalul unei mulțimi, este un număr prin care se poate răspunde la înttrebarea câte elemente are acea mulțime. Am văzut că mulțimea numerelor naturale, fiind o mulțime infinită, dar numărabilă, are cardinalul numit de noi *a*, pe care l-am desemnat ca fiind infinit. Aceste este singurul cardinal infinit pe care îl acceptă Brouwer. În cazul celui de al doilea tip de mulțimi pus anterior în discuție, acela al mulțimilor infinite nenumărabile, opinia lui Brouwer este tranşantă: nu se poate admite existența unor astfel de mulțimi, după cum nu se poate admite existența acelei mulțimi care a generat dificultatea majoră a teoriei mulțimilor; este vorba despre mulțimea tuturor mulțimilor infinite nenumărabile. Cantor arătase, prin procedeul diagonal, cum o mulțime infinită nenumărabilă putea fi obținută: luând un interval oarecare din mulțimea numerelor reale (de exemplu, intervalul deschis de la 0 la 1) şi exprimând zecimal toate numerele din acest interval, se pot imagina la infinit numere reale cuprinse în acest interval care să depăşească orice posibilă corespondență 1 la 1 între membrii intervalului şi o mulțime numărabilă finită. Acestor mulțimi Cantor le atribuise cardinale mai mici decât puterea continuului, dar mai mari decât a mulțimii numerelor naturale. Problema existenței acestor mulțimi, ca şi a cardinalelor lor (pe care Cantor le numise transfinite), îi apare ca absurdă lui Brouwer, în măsura în care el consideră că intervalul deschis de la 1 la 0 al mulțimii numerelor reale poate fi construit, însă numai dacă îl considerăm numărabil.

Conceptele de cardinal transfinit, mulțime a tuturor mulțimilor nenumărabile infinite nefiind concepte constructive, sunt eronate din punct de vedere intuiționist, şi trebuie eliminate din cadrul preocupărilărilor noastre.

Iată cum Brouwer rezolvă problema paradoxelor logico-matematice, eliminând, în fond, obiectul asupra căruia s-a purtat întreaga discuție. O consecință deosebit de gravă a acestui fapt este că, neadmițînd conceptul de mulțime a tuturor mulțimilor, Brouwer nu admite, ca rezultantă, nici interpretarea numerelor în termeni de clase, făcând inutil întreg efortul lui Russell, şi dând, prin urmare, o puternică lovitură logicismului.

Nici formalismul nu rămâne neatins în urma efortului lui Brouwer: admițând ideea conform căreia construcția intuitivă constituie unica garanție a existenței matematice, intuiționismul postulează o teză fundamentală, evident opusă formalismului: „*existența matematică* (concepută intuitiv) *implică întotdeauna necontradicție logică, dar necontradicția logică nu implică întotdeauna existență matematică efectivă*. În mod concret, această teză a determinat atitudinea permanent negativă a intuiționiştilor față de încercările formaliste de *axiomatizare* a teoriei mulțimilor.” [xxxi]

Din punct de vedere intuiționist, aşa cum am văzut, orice teorie matematică, dacă este construită intuitiv, conform rigorilor lui Brouwer, este evidentă şi necontradictorie. A se încerca axiomatizarea ei ulterioară, înseamnă a descrie şi sistematiza expresiile lingvistice corespunzătoare rezultatelor matematice obținute în prealabil. Dar cum formaliştii nu dispuneau în prealabil de o astfel de teorie construită intuitiv, ci doreau construcția ei axiomatic-necontradictorie, nu ar fi făcut, în opinia lui Brouwer, decât să ajungă, poate, la o teorie necontradictorie, dar să mențină „în acelaşi timp toate conceptele dubioase care au generat contradicțiile”[xxxii].

Reproşul principal pe care îl aduce Brouwer formaliştilor constă în faptul că aceştia, scindând matematica în partea sa elementară şi cea transfinită, s-au menținut la simpla constatare a contradicției dintre finit şi infinit, dar au sfârşit prin a reduce infinitul la finit, în încercarea lor de a trata, în cadrul metodei axiomatice, domeniul infinitului cu mijloace finitiste. În replică, Brouwer va sublinia că gândirea matematică este complet independentă de limbaj şi de logică, neputându-i-se aplica rigorile logicii, cum ar fi aceea a legii terțului exclus, ce are valabilitate doar în cazul sistemelor finite de elemente. Prin urmare, va arăta el, cauza paradoxelor din matematică o constituie utilizarea fără restricții a logicii în matematică.

Contrar logiciştilor, intuiționiştii vor ajunge la concluzia că nu matematica depinde de logica matematică, ci că logica matematică depinde de matematică. Ceea ce echivalează cu a spune că : *„matematicile trebuie să constituie fundamentele logicii...”*[xxxiii]

ÎNCHEIERE
COMPARAȚIE: LOGICISM, FORMALISM, INTUIȚIONISM

În paginile anterioare ne-am propus să expunem, în liniile lor esențiale, cele trei concepții mari asupra fundamentelor matematicii, arătând, în acelaşi timp, principalele obiecții ce li se pot aduce. Aşa cum am văzut, disputa dintre ele este una dintre cele mai pasionante din filosofia modernă, având ca punct de plecare întrebarea dacă propozițiile matematicii sunt analitice sau sintetice. Dacă Russell acceptă necondiționat opinia lui Leibniz în privința caracterului analitic a priori al propozițiilor matematice, intuiționiştii, în frunte cu Brouwer, îşi însuşesc opinia lui Kant despre caracterul sintetico apriori al acestora.

Aceste poziții radical opuse au condus la două atitudini în raport cu matematica: în vreme ce Russell îşi propune să construiască întreaga matematică din concepte pur logice, având ca intenție de a demonstra că întreaga matematică este reductibilă la logică, fiind subordonată acesteia, intuiționiştii vor, după expresia lui P. Botezatu[xxxiv] să restaureze demnitatea matematicii, aruncând logica într-o poziție deplorabilă: „Din demnitatea de ştiință *princeps*, pe care o deținea în logicism, logica este coborâtă la nivelul unei *aplicații a matematicii*. Dacă logicismul ne invită să dizolvăm matematica în logică, intuiționismul ne propune să înecăm logica în matematică.”

Desigur, aşa cum am remarcat în expunerea noastră, idealul de a exprima logic, într-un simbolism riguros, întregul aparat al matematicii a eşuat în măsura în care în procesul de construcție deductivă a matematicii intervin în mod inevitabil axiome care nu sunt de natură logică, sau reguli care nu pot fi integral formalizate, cum am văzut că este cazul regulii substituției, în sistemul din *Principia Mathematica*. Însă utilitatea simbolismului creat de Russell, împreună cu Whitehead nu poate fi contestată, ceea ce face întreprinderea logicistă o reuşită doar pe jumătate. Depinde de noi să o considerăm dacă o reuşită incompletă se constituie într-un insucces.

Ceea ce rămâne clar este că, acceptând criteriul evidenței interioare, aşa cum o fac intuiționiştii, privăm matematica de caracterul ei de ştiință riguroasă: „îndoieli grave vin să submineze poziția intuiționistă. Ideea unei intuiții a priori a timpului pluteşte în deplină obscuritate metafizică, iar criteriul evidenței interioare nu poate salva noțiunea de demonstrație riguroasă.”[xxxv]

Ca răspuns la poziția intuiționistă, ne permitem să observăm, împreună cu P. Botezatu, că : „departe de a funda logica, matematica presupune logica”[xxxvi].

Aici ne vine în ajutor poziția formalistă, în măsura în care Hilbert a fost conştient de faptul că bazele matematicii nu pot fi construite fără logică, însă nici logica nu poate fi construită fără să implice matematica. Dacă poziția formalistă ajunge şi ea să fie supusă eşecului, aceasta se întâmplă pentru că pretenția sa era exagerată: a substitui logicii (numită de Hilbert meta-matematică) întreaga matematică, constituită într-un sistem formal complet, înseamnă să ignorăm complet conținutul axiomelor şi teoremelor pe care le folosim, tratându-le ca fiind lipsite de orice semnificație. Acesta este punctul esențial în care se despart cele două curente, logicismul şi formalismul: „logicismul obiectează formalismului că simbolurile logico-matematice, departe de a fi lipsite de sens, au o semnificație bine determinată.”[xxxvii]

În acelaşi timp, remarcăm că în acest punct logicismul se apropie oarecum de opinia intuiționistă, mai mult ca formă, şi mai puțin ca fond, în sensul că deşi atribuie o semnificație simbolului, consideră că justificarea logică a matematicii nu cere construcția intuitivă a entităților matematice.

Ceea ce rămâne valoros şi datorăm formalismului este însă metoda axiomatică. Blamată de intuiționişti, considerată de aceştia improprie fundamentării autonome a matematicii, „metoda axiomatică, esențial născută din lucrările lui Hilbert, s-a dovedit de o importanță excepțională, şi matematica îi datoreşte extrem de mult...”[xxxviii]

Ceea ce i se reproşează formalismului, însă, este tocmai ceea ce are în comun cu logicismul, sau moştenirea pe care şi-a asumat-o de la acesta; i s-a obiectat faptul că, însuşindu-şi simbolismul gata făcut de Russell, şi-a insuşit şi celebra sa teorie a tipurilor. Or, teoria tipurilor, stabilind o ierarhie între concepte, după cum reprezintă indivizi, proprietăți ale indivizilor, ş.a.m.d, are un o clară implicație ontologică, făcând să intervină conținutul conceptelor, şi părăsind terenul formalismului pur. Iată cum, după expresia lui A. Dumitriu, „acceptând teoria simplă a tipurilor, Hilbert a anulat programul integral al formalizării complete a logicii şi matematicilor.”[xxxix]

Scopul întreprinderii noastre a fost acela de a reliefa câteva din aspectele esențiale ale disputei moderne între logicism, formalism şi intuiționism. Soluțiile oferite de aceste direcții problemei atât de chinuitoare asupra fundamentelor matematicii poate că nu au fost încununate în totalitate de succes, însă ele trebuie apreciate în primul rând prin scopul lor şi prin metodele pe care le-au propus, conducând la un real progres în logica matematică.

Dacă este să dăm totuşi un răspuns la întrebarea referitoare la prioritatea unei dintre cele două discipline, logica şi matematica, relevantă şi demnă de reprodus aici ni se pare poziția ilustrului logician român Petre Botezatu: „Deşi datorită procesului rapid de matematizare a ştiinţelor, matematica şi-a extins considerabil domeniul, ea rămâne totuşi o ştiinţă particulară. Ca orice ştiinţă specială, *matematica este dublată de o metamatematică*, de teoria structurii teoriilor matematice, iar aceasta aparţine logicii. (...) La orice nivel de abstracţiune, teoria trimite la metateorie, iar aceasta este logica. Oricât de abstractă ar fi matematica, logica este şi mai abstractă, deoarece ea reflectează critic asupra matematicii. Dacă matematica aspiră la demnitatea de ştiinţă a structurilor, atunci logica ocupă imediat poziţia superioară de teorie despre structura teoriei care studiază structurile. Astfel *logica se află totdeauna cu un pas înaintea matematicii*."[xl].

BIBLIOGRAFIE:

1. Ayer, A. J., *Russell and Moore: The Analytical Heritage*, London, George Allen & Unwin, 1972;
2. Botezatu, Petre, *Semiotică şi negaţie*, Editura Junimea, Iaşi, 1973;
3. Copi, Irving M., *The Theory of Logical Types*, London, Routledge & Kegan Paul, 1971;
4. Dumitriu, Anton, *Istoria logicii*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975;
5. Dumitriu, Anton, *Logica lui D. Hilbert*, Revista fundaţiilor regale, Bucureşti, 1941;
6. Dumitriu, Anton, *Mecanismul logic la matematicilor*, Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1968;
7. Dumitriu, Anton, *Soluţia paradoxelor logico-matematice*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966;
8. Enescu, Gheorghe, *Paradoxuri, sofisme, aporii*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 2003;
9. Frege, Gottlob, *Scrieri logico-filosofice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977;
10. Hollinger, A., *Dialoguri matematice*, Editura Ion Creangă, Bucureşti, 1982;
11. Kneale, W., Kneale, M, *Dezvoltarea logicii*, vol II, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1975;

12. Körner, Stephen, *The Philosophy of Mathematics*, London, Hutchinson University Library, 1960;
13. Körner, Stephen, *Introducere în filosofia matematicii*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965;
14. Russell, Bertrand, *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, London, George Allen & Unwin, 1975;
15. Russell, Bertrand, *La sagezza dell' Occidente*, vol. 2, Longanesi & Co., Milano, 1978;
16. Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics*, London, George Allen&Unwin, 1937;
17. Russell, Bertrand, A.N. Whitehead, *Principia Mathematica*, Prefaţa, Cambridge, 1910-1913;
18. Russell, Bertrand, *Logic and Knowledge: essays 1901-1950*, ed. by Robert Charles Marsh, George Allen & Unwin, London, 1956;
19. Schilpp, Paul Arthur, *The Philosophy of Bertrand Russell*, Tudor Publishing Company, 1951;
20. Shanker, Stuart G. (ed.), *Philosophy of Science, Logic and Mathematics in the Twentieth Century*, Routledge, London, 2004;
21. Surdu, Alexandru, *Elemente de logică intuiţionistă*, Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1976;
22. Ţurlea, Marin, *Filosofia şi fundamentele matematicii*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1982.

NOTE

[i] Bertrand Russell, *La sagezza dell' Occidente*, vol. 2, Longanesi & Co., Milano, 1978, p. 153

[ii] A. Hollinger, *Dialoguri matematice*, Editura Ion Creangă, Bucureşti, 1982, p. 123

[iii] Bertrand Russell, *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, London, George Allen & Unwin, 1975, p. 16

[iv] Stephen Körner, *The Philosophy of Mathematics*, London, Hutchinson University Library, 1960, p. 36

[v] Gh. Enescu, *Paradoxuri, sofisme, aporii*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 2003, p. 83

[vi] Sorin Vieru, *Studiu introductiv* la Gottlob Frege, *Scrieri logico-filosofice*, I, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977, p. X
[vii] Ibidem, p. XX
[viii] Bertrand Russell, *Logic and Knowledge*, London, George Allen & Unwin, 1956, p. 260
[ix] Bertrand Russell, A.N. Whitehead, *Principia Mathematica*, vol. I, Cambridge, 1910, p. 40
[x] Ibidem, p. 38
[xi] Ibidem, p. 168
[xii] Cf. Ibidem, p. 175
[xiii] Anton Dumitriu, *Istoria logicii*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975, p. 912
[xiv] A. N. Whitehead, Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge, 1910, p. 2
[xv]A. Dumitriu, *op. cit.*, p. 912
[xvi] Bertrand Russell, *The Principles of Mathematics*, London, George Allen & Unwin, 1937, p. 16
[xvii] Anton Dumitriu, *op. cit.*, p. 912
[xviii] Stephen Körner, *Introducere în filosofia matematicii*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965, p. 87
[xix] David Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik*, Sem. Universităţii din Hamburg, vol. 6, p. 65, apud Stephen Körner, *op. cit.*, p. 96
[xx] Ibidem, p. 309
[xxi] A. Dumitriu, *Mecanismul logic la matematicilor*, Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1968, p. 209
[xxii] W. Kneale şi M. Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol II, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1975, p. 320
[xxiii] A. Dumitriu, *op. cit.*, p. 210
[xxiv] A. Dumitriu, *Logica lui D. Hilbert*, Revista fundaţiilor regale, Bucureşti, 1941, p. 616.
[xxv] Ibidem, p. 631
[xxvi] Conform Michael Detlefsen, *Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century*, în vol. *Philosophy of Science, Logic and Mathematics in the Twentieth Century*, edited by, Stuart G. Shanker, Routledge, London, 2004, p. 81
[xxvii] Stephen Körner, *op. cit*, p. 116

[xxviii] Anton Dumitriu, *Mecanismul logic al matematicilor*, ed. cit., p. 182
[xxix] Stephen Körner, *op. cit.*, p. 161
[xxx] Al. Surdu, *Elemente de logică intuiționistă*, Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1976, p. 17
[xxxi] Ibidem, p. 18
[xxxii] Ibidem, p. 18
[xxxiii] Ibidem, p. 19
[xxxiv] Petre Botezatu, *Semiotică şi negație*, Editura Junimea, Iaşi, 1973, p. 81
[xxxv] Ibidem, p. 83
[xxxvi] Ibidem
[xxxvii] Anton Dumitriu, *Mecanismul logic al matematicilor*, Editura Academiei RSR, Bucureşti, 1968, p. 219
[xxxviii] Ibidem, p. 213
[xxxix] Ibidem, p. 221
[xl] Petre Botezatu, *op. cit.*, p. 85